Potenzrechnung

11. Juni 2012

Berfin Berg
Regelheft
DV10Z11
Quadratische Funktionen
Quadratische Gleichungen
Heft Aufzeichnungen Mathe
Mathematik Wahlmathe
Wahlpflihtmathe
SJ1213
Schuljahr 2013/2013

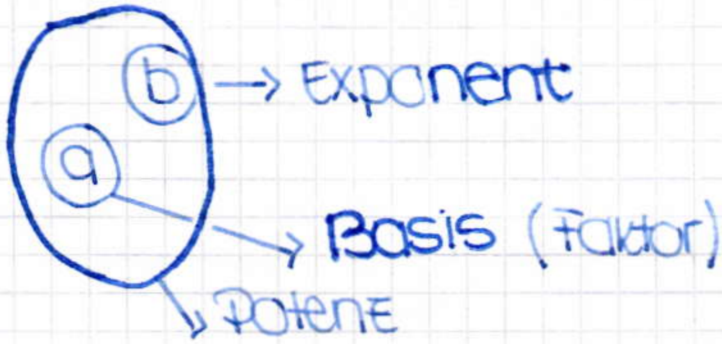
- Produkte, sind verkürzt Summen

  $\underbrace{a+a+a+a+a}_{\text{gleiche Summanten}} = \underline{\underline{5a}}$

- Potenzen, sind verkürzte Produkte

  $\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot b}_{\text{gleiche Faktoren}} = \underline{\underline{b^{4}}}$ (b hoch 4)

  gleiche Faktoren 4 Stück

- 

- $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = \underline{\underline{8}}$
- $7^2 = 7\cdot 7 = \underline{\underline{49}}$
- $\boxed{a^0 = 1}$
- $\boxed{a^1 = a}$
- **im Zweifel: das Produkt ausschreiben**
- Vorsicht bei negativen Basen

  $-2^3 = -(2^3) = \underline{\underline{-8}}$

  $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = \underline{\underline{-8}}$

  $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = \underline{\underline{16}}$

  $-2^4 = \underline{\underline{-16}}$

S. 64 19. Juni 2019

Beispiel mit Lösung:

Aufgabe: Zerlegen Sie in Faktoren und fassen Sie zu einer Potenz zusammen:
$a^4 \cdot a^3$

Lösung: $a^4 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$
kürzer: $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$

Wir multiplizieren Potenzen mit gleicher Basis, indem wir die Exponenten addieren und die Basis unverändert lassen.

Satz 64

Erster Potenzsatz: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(a \in \mathbb{Z}; m, n \in \mathbb{N}^*)$
Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Tipp: 1. Erst Koefizienten multiplizieren.
2. Bestimme gleiche Basen oder Exponenten.

18. Juni 2012 S. 65

Die Division. Zweiter Potenzsatz

Beispiele mit Lösungen

Das Verteilen

Aufgabe : Teilen Sie 12m Stoff in 3 gleich große Teile!
Lösung : 12m : 3 = 4m

Beim Teilen ist die Gesamtmenge und die Anzahl der Teilmengen gegeben, die Teilmenge ist gesucht.

S. 68

Beispiel mit Lösung

Aufgabe: Berechnen Sie $a^7 : a^3$!
Lösung : Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.
Wir rechnen deshalb :
$a^7 : a^3 = a^{7-3} = a^4$, da $a^4 \cdot a^3 = a^{4+3} = a^7$

Satz 68

Zweiter Potenzsatz:

$a^n = a^{m-n}$ $(a \in \mathbb{Z}^*; m, n \in \mathbb{N}^*; m \geq n)$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

Distributivgesetz mit Potenzsätzen:

$2a^3 (a^2 + 4ab^4) =$

Faktor mal Summe → Distributivgesetz

$2a^3 \cdot a^2 + 2a^3 \cdot 4ab^4 =$

$2a^5 + 8a^4b^4$ $[= 2a^4 (a \cdot 4b^4)]$

$(12a^7b^8 - 8a^5b) : 2a^5b =$

$\frac{12a^7b^8}{2a^5b} - \frac{8a^5b}{2a^5b} =$

$6a^2b^7 - 4$

$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1$!

Rechnen mit Quadratwurzeln

08. Juli 2012

$$\sqrt{a} = b \rightarrow b^2 = \underline{\underline{a}}$$

$\hookrightarrow b \geq 0$

$$\sqrt{36} = 6 \rightarrow 6^2 = \underline{\underline{36}}$$

10.07.12

Menge der irrationale Zahlen

- $\underline{\underline{\mathbb{N}}} = \{1; 2; 3; \dots\}$
- $\underline{\underline{\mathbb{Z}}} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
- $\underline{\underline{\mathbb{Q}}} = \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0\}$

$[\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup] \mathbb{Q}$: Rationale Zahlen

↓

~~Alle~~ jede rationale Zahl lässt sich durch einen Bruch darstellen und durch eine Dezimalzahl (endlich oder unendlich periodisch)

- Irrationale Zahlen
  - unendlich nicht periodisch
  - lassen sich nicht in ein Bruch umwandeln
  - Wurzeln aus bestimmten Primzahlen sind häufig Irrational ($\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ ...)

Höhere Wurzeln

28.09.2012

* bis jetzt, „Quadratwurzeln"

$$\sqrt{a} = b \leftrightarrow b^2 = a$$

$$\sqrt[2]{a} = b \leftrightarrow b^2 = a$$

Wurzelexponent wird bei Quadratwurzeln weggelassen.

* Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{a} = b \leftrightarrow b^3 = a$$

* n-te Wurzel

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$$

Potenzen mit rationalen Exponenten

04.10.2012

a^n ; $n \in \mathbb{N}_0$

$\sqrt[n]{a}$; $n \in \mathbb{N}$

=> was passiert, wenn Exponenten rational sind?

$4^{\frac{1}{2}}$; a^{-1} ; $10^{\frac{3}{4}}$; $b^{-\frac{3}{5}}$

* was ist $a^{\frac{1}{2}}$?

$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$ **!**

Verdacht: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{1}{3}}$?

$\underbrace{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}_{\text{3-mal}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a$ **!**

$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Beispiel:

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$

Allgemein:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

25.10.2012

$$a^{\frac{3}{2}} = a^{3 \cdot \frac{1}{2}} = (a^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt[2]{a^3}$$

nicht mitschreiben

Potenzen potenzieren
(Exp. multiplizieren)

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}} \quad (n \neq 0)$$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$a^{-3} = a^2 : a^5 = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}$$

- bei der Umwandlung von Potenzen und Wurzeln möglichst kleine Basen bzw. Radikanten erzeugen
- wenn möglich Primzahlen
- wenn notwendig Primfaktorzerlegung durchführen

Beispiel:

$$\sqrt[7]{2^8} \cdot \sqrt[11]{4^9} =$$

$$2^{\frac{8}{7}} \cdot 4^{\frac{9}{11}} =$$

$$2^{\frac{8}{7}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{9}{11}} =$$

$$2^{\frac{8}{7}} \cdot 2^{\frac{18}{11}} =$$

$$2^{\frac{8}{7}+\frac{18}{11}} = 2^{\frac{88+126}{77}} = 2^{\frac{214}{77}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt[77]{2^{214}}}}$$

08.11.2012

Rechnen mit Wurzeln

* Addition und Subtraktion
  → siehe Wdh.

* $\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{9 \cdot 2}$

$$= \sqrt{2} + (9 \cdot 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} + 9^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$= \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$$

* Multiplikation / Division / Wurzel von Wurzel (WvW)

→ wandeln in Potenzen → Potenzgesetze anwenden

→ zurückwandeln zur Wurzeln

* Beispiele:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

$\sqrt{6} : \sqrt{3} =$

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{(2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2 \cdot 3}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Beispiel 1

$6^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{2}} =$

$(6 : 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Beispiel 2

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{8^2}} =$

$$\left(\left(\left(2^3\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{7}} = 2^{3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} = 2^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^2}$$

Quadratische Funktionen

13. 12. 2012

Allgemeines:

Funktionsgleichung: $y = \underbrace{ax^2}_{\text{Quadratische Glied}} + \underbrace{bx}_{\text{lineare Glied}} + \underbrace{c}_{\text{absolute Glied}}$

Beispiele:

① $y_1 = -4x^2 - x + 1$

$a = -4$; $b = -1$; $c = 1$

② $y_2 = -x^2 - \frac{1}{2}$

$a = -1$; $b = 0$; $c = \frac{1}{2}$

$\boxed{a ; b ; c = \text{Koeffizienten}}$!

$y = x^2$:

- Graph: Parabel
- Graph: Normalparabel
- $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$
- Symmetrie zur y-Achse
- Scheitel $S(0|0)$
  - „Scheitel ist der Punkt wo die Parabel umkehrt."
- Steilheit:
  - rechts vom Scheitel: $m > 0$
  - beim Scheitel: $m = 0$
  - links vom Scheitel: $m < 0$
  - je größer x, je größer m
  - je kleiner x, je kleiner m

- Quadrantenverlauf: I. → II.
- Schnittpunkte mit den Achsen:
  x-Achse: $P_1\ (0|0)$
  ↳ Berührungspunkt
  y-Achse: $P_2\ (0|0)$

14.12.12

$$\boxed{y = x^2 + c}$$

- Bsp.: $y = x^2 + 4;\ c = 4$
  $y = x^2 - 3;\ c = -3$

- allen gemeinsam:
  $a = 1;\ b = 0;\ c \in \mathbb{Q}$
  $(c \in \mathbb{R})$

- Einfluss von c:
  - Quadrantenverlauf
    $c \geq 0$: I nach II
    $c < 0$: I → II → III → IV (2 Nullstellen)

  - Scheitel
    $S\ (0|c)$

  - Graph
    Verschiebung der Normalparabel um c in y-Richtung

Satz 223:

Der Graph der Funktion $x \to x^2 + c$ ist eine Normalparabel, deren Scheitelpunkt in $S\,(0|c)$ liegt.
In der Funktion $x \to ax^2 + c$ $(a, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$ bedeutet a Dehnung oder Pressung in Richtung der y-Achse. Bei $a < 0$ wird die Parabel vor der Verschiebung in Richtung der y-Achse an der x-Achse gespiegelt.

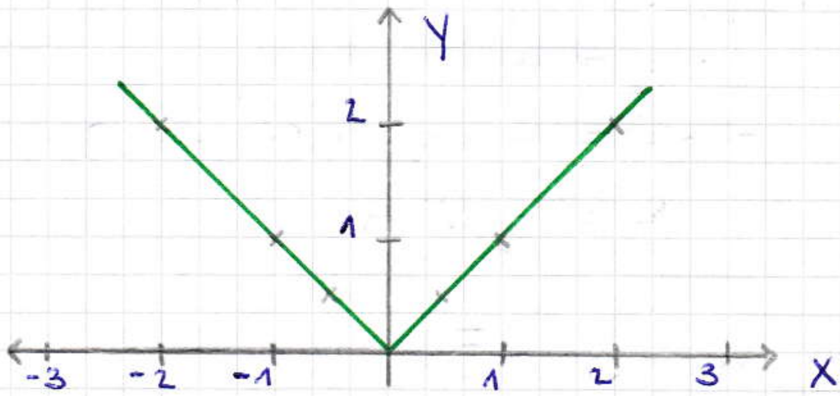
Betrag:

- Betrag ist die Zahl ohne Vorzeichen!
- $\boxed{|x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}}$
- Bsp.: $|\underbrace{-5}_{x}| = -(\underbrace{-5}_{x}) = \underline{\underline{5}}$

  weil $x < 0$

  $|10| = 10$ weil $x > 0$

- Graph:



$y = |x|$

- Algebra:

$|x+1| = 4$

Fallunterscheidung:

$x+1$ kann größer oder kleiner oder gleich 0 sein!

1. Fall: $x+1 \geq 0$

$x_1 + 1 = 4 \quad | -1$

$x = 3$

2. Fall: $x+1 < 0$

$-(x+1) = 4 \quad | \cdot (-1)$

$x+1 = -4 \quad | -1$

$x_2 = -5$

Probe:

x_1: $|3+1| = 4$

$|4| = 4$ weil $4 \geq 0$

$4 = 4$ w.A.

x_2: $|(-5)+1| = 4$

$|-4| = 4$

$-(-4) = 4$ weil $-4 < 0$

$4 = 4$ w.A.

$\mathbb{L} = \{3; -5\}$

10.01.2013

Beispiel 2 für Betragsgleichungen

$|x-4| = -20$ ↯ Wiederspruch!

Betrag eines Terms ist immer nichtnegativ (größer oder gleich Null). $\rightarrow$ $\mathbb{L} = \emptyset$

Beispiel 3

$|2a-4| = 12$

Fall 1: $2a-4 \geq 0$

$$\begin{aligned} 2a - 4 &= 12 \quad | +4 \\ 2a &= 16 \quad | :2 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Fall 2: $2a-4<0$

$$\begin{aligned} -(2a-4) &= 12 \\ 2a - 4 &= -12 \quad | +4 \\ 2a &= -8 \quad | :2 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} |2\cdot 8-4| &= |16-4| \\ &= |12| = 12 \text{ w.A.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2\cdot(-4)-4| &= |-8-4| \\ &= |-12| = 12 \text{ w.A.} \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{8; -4\}$

Exakte Nullstellenberechnung

$y = x^2 + c$

- Nullstelle: Punkt, bei dem die y-Koordinate Null ist $P_0(x_0|0)$

- $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

$$\left[\sqrt{x^2} = \begin{cases} +x \\ -x \end{cases}\right]$$

Beispiel:

$$\sqrt{25} = |x|$$
$$\sqrt{5^2} = |x|$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -5$$

$$\sqrt{25} = |x|$$
$$5 = |x|$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -5$$

- $y = x^2 - 16 \quad (c < 0 \rightsquigarrow 2\,\text{NSt.})$

$$0 = x_0^2 - 16 \quad | +16$$
$$16 = x_0^2 \quad | \sqrt{}$$
$$\sqrt{16} = \sqrt{x_0^2}$$
$$4 = |x_0|$$

Fall 1: $x_0 \geq 0$

$$4 = x_{01}$$

$P_{01}(4|0)$

Fall 2: $x_0 < 0$

$$4 = -x_0 \quad | \cdot (-1)$$
$$-4 = x_{02}$$

$P_{02}(-4|0)$

Kurzschreibweise: $X_{01/2} = \pm 4$ (1&2)

$y = (x+d)^2$

25.01.2013

$= x^2 + 2xd + d^2$

$a = 1$; $b = 2d$; $c = d^2$

Scheitelpunktform

$$\boxed{y = (x+d)^2 \longleftrightarrow S(-d|0)}$$

↳ nicht jede quadratische Funktion lässt sich in $(x+d)^2$ umformen

Beispiel :

1. $y = x^2 + 5x + 6{,}25$

$= (x+2{,}5)^2$

⇝ $S(-2{,}5|0)$

2. $y = x^2 + 2x + 16$

$\neq (x+4)^2$

$\neq (x+1)^2$

⇝ kein Binom bildbar

(noch kein SP bestimmbar)

3. Normalparabel mit $S\left(-\frac{1}{2}\middle|0\right)$

$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

$= x^2 + x + \frac{1}{4}$

$a = 1$; $b = 1$; $c = \frac{1}{4}$

Berfin Berg Z11b 17.01.2013

Bestimmung der Scheitelpunkte mit den Siebereglern http://www.geogebratube.org/student/m2243

Hinweis: Den Schieberegler für a nicht benutzen. Vorerst :)

Scheitel bei	Nach oben geöffnet	Nach unten Geöffnet
(−5|0)	$y = x^2 + 10x + 25$	$y = -x^2 - 10x - 25$
(−4|0)	$y = x^2 + 8x + 16$	$y = -x^2 - 8x - 16$
(−3|0)	$y = x^2 + 6x + 9$	$y = -x^2 - 6x - 9$
(−2|0)	$y = x^2 + 4x + 4$	$y = -x^2 - 4x - 4$
(−1|0)	$y = x^2 + 2x + 1$	$y = -x^2 - 2x - 1$
(0|0)	$y = x^2$	$y = -x^2$
(1|0)	$y = x^2 - 2x + 1$	$y = -x^2 + 2x - 1$
(2|0)	$y = x^2 - 4x + 4$	$y = -x^2 + 4x - 4$
(3|0)	$y = x^2 - 6x + 9$	$y = -x^2 + 6x - 9$
(4|0)	$y = x^2 - 8x + 16$	$y = -x^2 + 8x - 16$
(5|0)	$y = x^2 - 10x + 25$	$y = -x^2 + 10x - 25$

Wie lautet die erste und die zweite Binomische Formel? Welche Schlüsse ziehst du aus den Ergebnissen?

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

31. 01. 2013

$y = (x+d)^2 + e$

* $y = x^2 - 6x + 2$
  → kein „reines Binom"
  → kein $y = (x+d)^2$

* $y = x^2 - 6x + 9 - 9 + 2$
  → quadratische Ergänzung
  → „reines Binom"

  $y = (x-3)^2 - 7$

  $S\,(3|-7)$

* Allgemein:
  $y = x^2 + bx + c$

  quadratische Ergänzung: $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

  $y = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
  → quadratische Ergänzung
  → Binom

  $= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
  $= (x-d)^2 + e$ (Scheitelpunkt-Form)

  $S\,(-d|e)$

* Scheitel zu Funktion

$S(-4|8)$ → Funktion: Jn Scheitelpunkt-Form einsetzen

$$y = (x+4)^2 + 8$$
$$= x^2 + 8x + 16 + 8$$
$$= \underline{\underline{x^2 + 8x + 24}}$$

07.02.2013

Einfluss Parameter a

* bis jetzt: $a = 1$; $y = ax^2$
* neu: $a \in \mathbb{Q}$

$\underline{\underline{y = ax^2}}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$y = \frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

→ Symmetrisch zur y-Achse

→ Scheitel $S(0|0)$

→ Nullstelle $P_0(0|0)$

$|a| > 1$: gestreckt

$|a| < 1$: gestaucht

$|a| = 1$: Normalparabel

$a = 0$: $y = 0$ (Gerade a xA)

$a > 0$: nach oben geöffnet

$a < 0$: nach unten geöffnet

a bestimmen:

$P(2|-8)$ einsetzen: $y = ax^2$

$-8 = a \cdot 2^2$

$-8 = 4 \cdot a$

$\underline{\underline{a = -2}}$ $\leadsto$ $\underline{\underline{y = -2x^2}}$

Scheitel von $y = ax^2 + bx + c$

21.02.2013

- $y = ax^2 \rightarrow S\,(0|0)$
  $y = ax^2 + c \rightarrow S\,(0|c)$

- $\underline{y = a\,(x+d)^2 + e}$
  ↳ ganz allgemeine Scheitelpunktform

- 1. Beispiel:

  $y = 2x^2 + 4x + 3$ → allgemeine Form (Normalform)

  $y = 2\left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)$ → a ausgeklammert

  →

  $y = 2\left(x^2 + 2x + 1 - 1 + \frac{3}{2}\right)$ → quadratische Ergänzung

  $y = 2\left[(x+1)^2 + \frac{1}{2}\right]$ → Binom bilden

  $\underline{\underline{y = 2\,(x+1)^2 + 1}}$ → Allgemeine Scheitelpunktform

  ⇝ $S\,(-d\,|\,e)$

  → $\underline{\underline{S\,(-1|1)}}$

- 2. Beispiel:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} + 2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3}x - 4\right) \qquad ; \left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - 4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{37}{9}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{37}{18}$$

NR: $-\frac{1}{2} \cdot f = -\frac{1}{3} \quad \left| :\left(-\frac{1}{2}\right) \left[\cdot(-2)\right]\right.$

$\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{S\left(-\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{37}{18}\right)}}$

$\underline{\underline{S^*(-0{,}3 \mid 2{,}1)}}$

Vom Graphen zur Normalform

22.02.2013

$y = \underline{a}\ (x + \underline{d})^2 + \underline{e}$

$S\ (-d \mid e)$

$S\ (2 \mid 1)$

$y = a\ (x - 2)^2 + 1$

$P\ (4 \mid 3)$

$3 = a\ (4-2)^2 + 1$

$3 = a \cdot 4 + 1 \qquad \mid -1$

$2 = 4a \qquad \mid :4$

$a = \frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow \quad y = \frac{1}{2}\ (x-2)^2 + 1$

$y = \frac{1}{2}\ (x^2 - 4x + 4) + 1$

$y = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 2 + 1$

$y = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 3$

Nullstelle quadratischer Funktionen

07. März 2013

- Nst.: $P_0 \; (x_0 | 0)$
- keine Nullstelle
- eine Nullstelle
- zwei Nullstellen
- unendlich viele Nullstelen
  (bei $a = b = c = 0$)
  ↳ entartete Parabel

- Lösung $\underline{0} = ax^2 + bx + c$
  ↳ y - Koordinate der Nst.

- $b = 0$:

Beispiel 1:

$y = x^2 + 4$

$0 = x^2 + 4 \quad | -4$

$\underline{\underline{-4 = x^2}}$ ↯ **Widerspruch!**

keine Nst, weil $x^2 \geq 0 \; \forall x$
↳ für alle

Beispiel 2:

$y = x^2 - 9$

$0 = x^2 - 9 \quad | +9$

$9 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\sqrt{9} = \sqrt{x^2}$

$\underline{\underline{3 = |x|}}$

Fall 1: $x \geq 0$

$\underline{\underline{3 = x_{01}}}$

Fall 2: $x < 0$

$3 = -x \quad | :(-1)$

$\underline{\underline{-3 = x_{02}}}$

$\underline{\underline{P_{01} = (3|0)}}$ $\underline{\underline{P_{02} = (-3|0)}}$

- $c = 0$:

$y = 2x^2 + 8x$

$0 = 2x^2 + 8x \quad | :2$

$0 = x^2 + 4x \quad | :x \neq 0$

$0 = x + 4 \quad | -4$

$\underline{\underline{x_{01} = -4}}$

Ist $x = 0$ Lösung?

$2x^2 + 8x =$

$2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 =$

$0 + 0 = \underline{\underline{0}} \rightsquigarrow \underline{\underline{x_{02} = 0}}$

$P_{01} = (-4|0)$; P_{02} $(0|0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx \\ \quad \text{ist } P\,(0|0) \text{ immer Nullstelle!} \end{array}}$$

Nullstellen beliebiger quadratischen Funktionen

Beispiel 1: 21. März 2013

$y = -2x^2 + 16x - 30$

$0 = -2x^2 + 16x - 30 \quad | : (-2)$

y = 0 weil bei Nst. y-Koordinate immer Null ist.

$0 = x^2 - 8x + 15$

$0 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 15$ quadratische Ergänzung

$0 = (x-4)^2 - 1 \quad | + 1$

$1 = (x-4)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$1 = |x - 4|$ Die Wurzel eines Quadrest ist gleich Betrag.

1. Fall: $x - 4 \geq 0$

$1 = x - 4 \quad | + 4$

$5 = x_{01}$

2. Fall: $x - 4 < 0$

$1 = -(x-4) \quad | \cdot (-1)$

$-1 = x - 4 \quad | + 4$

$x_{02} = 3$

Fallunterscheidung

Probe: $f(5) = -2 \cdot 25 + 16 \cdot 5 - 30$

$= -50 + 80 - 30$ w.A.

$f(3) = -2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 - 30$

$= -18 + 48 - 30$ w.A.

$P_{01}(5|0)$

$P_{02}(3|0)$

Beispiel 2 :

$y = 2x^2 - 28x + 98$

$0 = 2x^2 - 28x + 98 \quad | :2$

$0 = x^2 - 14x + 49$

$0 = (x-7)^2$

$\rightsquigarrow \quad x_0 = 7$

$P_0 = (7|0)$

Probe : $f(7) = 2 \cdot 49 - 28 \cdot 7 + 98$

$= 98 - 196 + 98$ w.A.

$S\,(7|0) \rightsquigarrow$ nur genau eine Nst.

Wenn eine quadratische Funktion genau eine Nst. hat nennt man es doppelte Nst.

Beispiel 3 :

$y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 4$

$0 = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 4 \quad | : \frac{3}{4} \; ; \; \cdot \frac{4}{3}$

$0 = x^2 + 4x + \frac{16}{3}$

$0 = x^2 + 4x + 4 - 4 + \frac{16}{3}$

$0 = (x+2)^2 + \frac{4}{3} \quad | -\frac{4}{3}$

$-\frac{4}{3} = (x+2)^2 \quad | \sqrt{}$ ↯

keine Nst. weil $\sqrt{-\frac{4}{3}}$ nicht def. in $\mathbb{R}$.

$(\sqrt{-\frac{4}{3}} \notin \mathbb{R})$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Nullstelle bestimmen von quadratischen Funktionen)

11. April 2013

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \quad | : a$$

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 = x^2 + px + q \quad (\text{p-q-Form})$$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Beispiel 1:

$$y = -2x^2 + 8x - 6$$

$$0 = -2x^2 + 8x - 6 \quad | : (-2)$$

$$0 = x^2 - 4x + 3$$

$\rightarrow$ $p = -4$; $q = 3$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\left[x_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{-4}{2} - (+3)} \right]$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm 1$$

$x_1 = 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$
$x_2 = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$

Beispiel 2:

$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

$0 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad | :3$

$0 = x^2 - 2x - 5$

$p = -2 \; ; \; q = -5$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{6}$

$x_1 = 1 + \sqrt{6} \approx \underline{\underline{3{,}4}}$
$x_2 = 1 - \sqrt{6} \approx \underline{\underline{-1{,}4}}$

Beispiel 3:

$y = x^2 - 8x + 16$

Möglichkeit 1: Lösung über Scheitel-Punkts-Form
Scheitel ist Nullstelle, da reines Binom.

Möglichkeit 2: $p = -8 \; ; \; q = 16$
$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$x_1 = \underline{\underline{4}}$ nur ~~genau~~ eine Nullstelle (Lösung)

Beispiel 4:

$y = -2x^2 + 8x - 9$

$p = -4 \; ; \; q = \frac{9}{2}$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{9}{2}}$ ↯

$\sqrt{4 - \frac{9}{2}} \notin \mathbb{R}$,

weil $4 - \frac{9}{2} < 0$.

⇝ keine Nullstelle.

Diskriminante

12. April 2013

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Legt die Anzahl der Lösung fest

Diskriminante:

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$D > 0$: genau 2 Lösungen

$D = 0$: genau 1 Lösung

$D < 0$: keine Lösung

Wurzelsatz von Vieta

18. April 2013

$y = 4x^2 - 4x - 3$

$\downarrow$ QLF

$x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$

$p = -1$; $q = -\frac{3}{4}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}}$$

$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} = q$

Beispiel:

$0 = x^2 - 3x - 5$

$p = -3$; $q = -5$

$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{20}{4}}$

$= \underline{\underline{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}}}}$

Probe mit Vieta:

$x_1 + x_2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}} + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$

$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$

$\underline{\underline{-p = 3}}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}\right)\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}\right)$$
$$= \frac{9}{4} - \frac{29}{4} = \frac{20}{4}$$
$$\underline{\underline{q = 5}}$$

19. April 2013

Schnittpunkt(-e) P/P und P/G

- Funktionstherme gleichsetzen
- durch ÄU p-q-Form herstellen
- mit allgemeinen Lösungsformel Lösungen bestimmen
- Ergebnis: x-Koordinaten der Schnittpunkt(e)
  y-Koordinate(n): x-Koordinaten einsetzen in eine der Funktionsgleichungen
- Was kann passieren?
  - kein Schnittpunkt
  - ein Schnittpunkt
  - zwei Schnittpunkte

Beispiel:

$f_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\rightarrow p = -4 \; ; \; q = 3$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$

$\underline{\underline{x_1 = 3}} \; ; \; \underline{\underline{x_2 = 1}}$

Probe:

$x_1 + x_2 = 4 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = 3 = q$

$$f_2(x_1) = \frac{1}{2} \cdot 9 - 2 \cdot 3$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{12}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$f_2(x_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$P_1 \left(3 \mid -\frac{3}{2}\right)$

$P_2 \left(1 \mid -\frac{3}{2}\right)$

Quadratische Gleichungen

6. Juni 2013

- Gleichung : $Term_1 = Term_2$
- Ziel : Die variablen so zerlegen, dass eine wahre Aussage entspricht.

$x + 2 = 8$

$x = 1$: $1 + 2 = 8$ f. A.
$x = 6$: $6 + 2 = 8$ w. A.

- Grundmenge $\mathbb{G}$ = i. d. R. ist $\mathbb{G} = \mathbb{R}$
  ↳ sind alle Zahlen die für die Variablen eingesetzt werden dürfen.

- Lösungsmenge $\mathbb{L}$
  ↳ alle Elemente der Grundmenge die eine wahre Aussage ergeben.

- Beispiel : $\mathbb{G} = \mathbb{N}$

$$2x + 4 = 5x - 2$$

$x = 1$: $2 \cdot 1 + 4 = 5 \cdot 1 - 2$ f.A.
$x = 2$: $2 \cdot 2 + 4 = 5 \cdot 2 - 2$ w.A.

$\mathbb{L} = \{2\}$, weil ...

1.) Gleichung wird zur W.A.
2.) $2 \in \mathbb{G}$

- Lösen i. d. R. mit Äquivalenz-Formel
- Lineare Gleichungen: Das sind ÄU die sich mit Hilfe von ÄU umformen lassen in $0 = bx + c$

$$2x + 4 = 5x - 2 \quad | -5x + 2$$
$$-3x + 6 = 0 \quad (b = -3;\ c = 6)$$

Lösung: $x = \dfrac{-c}{b}$

- quadratische Gleichungen:
Gleichungen die sich mit Hilfe von ÄU umformen lassen in $0 = x^2 + px + q$

Beispiel: $\dfrac{2}{x} = \dfrac{x+4}{7} \quad | \cdot 7x$

$$14 = x^2 + 4x \quad | -14$$
$$0 = x^2 + 4x - 14$$
$$(p = 4;\ q = -14)$$

↳ Lösen mit allgemeiner Lösungsformel

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= -2 \pm \sqrt{4 + 14}$$
$$= -2 \pm \sqrt{18}$$

→ 2 Lösungen ; $D > 0$ → keine Lösung ↳ $D < 0$

→ 1 Lösung ; $D = 0$

$P(-4 \mid 8)$; $Q(6 \mid 14)$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

$$8 = a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c$$
$$14 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$$

$$8 = 16a - 4b + c \quad \text{I.}$$
$$14 = 36a + 6b + c \quad \text{II.}$$

$$a = 1$$

$$8 = 16 - 4b + c$$
$$14 = 36 + 6b + c$$

$$a = 2$$

$$8 = 32 - 4b + c$$
$$14 = 72 + 6b + c$$

$$b = -\frac{17}{5} \quad ; \quad c = -\frac{188}{5}$$

$$y = 2x^2 - \frac{17}{15}x - \frac{188}{5}$$

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{x+1}{x+2} \quad \Big| \ (x-1)\cdot(x+2)$$

$$(2x+3)\cdot(x+2) = (x-1)\cdot(x+1)$$

$$2^2 + 7x + 6 = x^2 - 1 \quad \Big| -x^2 + 1$$

$$x^2 + 7x + 7 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{29}{4}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{20}{4}}}}$$